Euklidische Äquivalenz kristallographischer Gruppen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

WINFRIED MELLIS

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544708_0007

Euklidische Äquivalenz kristallographischer Gruppen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

WINFRIED MELLIS

Bochum 1981

I N H A L T

Einleitung 1

1 Kristallographische Gruppen 5

2 Quotientenräume 11

3 G-invariante, positiv definite, symmetrische Bilinearformen 18

4 Die Modulräume 35

5 Induzierte Metriken 56

6 Die Modulräume der kristallographischen Gruppen der Ebene 65

7 Weil-Räume und Chabauty-Räume 71

Literaturverzeichnis 79

EINLEITUNG

Eine euklidische kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ ist eine diskrete Untergruppe der Gruppe $E(n)$ aller euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Orbitraum $\mathbb{R}^n/\Gamma$.

L. Bieberbach klassifizierte diese Gruppen bis auf Isomorphie (vgl. [1] und [2]) und bewies, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Isomorphieklassen existieren. Gleichzeitig zeigte er, daß die Isomorphieklassen genau die Äquivalenzklassen modulo Konjugation mit einer Affinität sind.

In dieser Arbeit werden die Äquivalenzklassen euklidischer kristallographischer Gruppen modulo Konjugation mit einer euklidischen Bewegung untersucht.

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ, dann bezeichnen wir mit

$\mathcal{M}(\Gamma)$ die Menge aller euklidischen Äquivalenzklassen der zu Γ affin äquivalenten kristallographischen Gruppen

$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ die Menge aller euklidischen Äquivalenzklassen der zu $\mathcal{E}$ affin äuqivalenten Erzeugendensysteme kristallographischer Gruppen

(vgl. dazu 4.1).

Die Mengen $\mathcal{M}(\Gamma)$ und $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ lassen sich in naheliegender Weise mit analytischen Strukturen versehen (vgl. 4.2 - 4.6).

Diese (semi-)analytischen Räume sind bianalytisch abbildbar auf "Modulräume".

In 4.7 und 4.8 wird bewiesen, daß eine bianalytische Abbildung von $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ auf den Raum F(G) der G-invarianten, positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen des $\mathbb{R}^n$, bzw. eine bianalytische Abbildung von $\mathcal{M}(\Gamma)$ auf den Quotienten von F(G) nach einer eigentlich diskontinuierlich operierenden Gruppe existiert. Dabei sei $G \subset O(n)$ die Projektion von $\Gamma \subset E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ auf O(n).

Der Raum F(G) wird im 3. Kapitel untersucht. In 3.8 wird bewiesen, daß für jede endliche Untergruppe $G \subset O(n)$ gilt: F(G) ist konvexe, offene Teilmenge eines $\nu(G)$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

Dabei berechnet sich $\nu(G)$ aus Parametern der G-Modulstruktur des $\mathbb{R}^n$:

Für jeden einfachen, invarianten G-Untermodul $V \neq \{0\}$ des $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der G-Endomorphismen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 1 oder 2 oder 4 (vgl. 3.5).

Betrachtet man nun die Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ in die direkte Summe seiner einfachen, invarianten G-Untermoduln, dann trifft für jeden der Summanden einer der drei Fälle zu.

Sind nun $k_1,\ldots,k_{l_1}$ die Vielfachheiten der jeweils G-isomorphen Summanden, auf die der 1. Fall zutrifft, entsprechend $k_{l_1+1},\ldots,k_{l_2}$ die, auf die der 2. Fall und $k_{l_2+1},\ldots,k_r$ die, auf die der 3. Fall zutrifft, dann ist

$$\nu(G) = \sum_{j=1}^{l_1} \frac{1}{2}k_j(k_j+1) + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} k_j^2 + \sum_{j=l_2+1}^{r} k_j(2k_j-1) .$$

Kriterien, um zu entscheiden, bei welchen der einfachen, invarianten G-Untermoduln des $\mathbb{R}^n$ der 1. Fall, der 2. Fall oder der 3. Fall vorliegt, werden in 3.15 bewiesen. Die Beispiele, die am Ende des 3. Kapitels gegeben werden, zeigen, daß sich die Formel zur Berechnung des $\nu(G)$ nicht vereinfachen läßt: Falls $n \geq 4$ ist, können einfache, invariante G-Untermoduln aller drei Fälle auftreten.

Jede euklidische kristallographische Gruppe Γ definiert auf dem Orbitraum $\mathbb{R}^n/\Gamma$ eine Metrik (vgl. 5.1). Es wird bewiesen, daß für je zwei kristallographische Gruppen Γ_1 und Γ_2 des $\mathbb{R}^n$ genau dann eine Isometrie

$$f: \mathbb{R}^n/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_2$$

existiert, wenn Γ_1 und Γ_2 in $E(n)$ konjugiert sind (vgl. 5.6)

Im 6. Kapitel werden die Modulräume der 17 kristallographischen Gruppen der Ebene berechnet.

Im 7. Kapitel werden Zusammenhänge zwischen Modulräumen und den entsprechenden Weil- bzw. Chabauty-Räumen hergestellt. Das Hauptergebnis dieses Kapitels stellt 7.7 dar: Für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ erhält man den Quotienten des Weil-Raumes $R_o(\Gamma,E(n))$ nach $Aut(E(n))$ aus $F(G)$, indem in $F(G)$ alle diejenigen Elemente identifiziert werden, die durch skalare Multiplikation mit einem $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ auseinander hervorgehen. Auf die gleiche

Weise erhält man den Quotienten des Chabauty-Raumes $S_o(\Gamma,E(n))$ nach $Aut(E(n))$ aus $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Im 1. Kapitel werden einige wesentliche Aussagen über kristallographische Gruppen zusammengestellt.

Im 2. Kapitel wird die Theorie der differenzierbaren Räume so weit entwickelt, wie sie zur Beschreibung der im 4. Kapitel definierten Räume benötigt wird. Die entsprechenden Beweise findet der Leser in [10] bzw. [12].

Für viele wertvolle Gespräche im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich mich bei den Herren Professoren Spallek und Zieschang besonders herzlich bedanken.

1. Kristallographische Gruppen

Eine Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Affinität des $\mathbb{R}^n$, falls ein $A \in GL(n,\mathbb{R})$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\alpha(x) = Ax + a.$$

Die Abbildung α schreiben wir dann auch in der Form $\alpha = (A,a)$. Die Affinität (A,a) heißt Bewegung des $\mathbb{R}^n$, falls $A \in O(n)$ ist. Bezüglich Hintereinanderausführung von Abbildungen bildet die Menge aller Affinitäten des $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe, die wir mit $A(n)$ bezeichnen.

Für $(A,a), (B,b) \in A(n)$ ist $(A,a)(B,b) = (AB, Ab + a)$.

Das neutrale Elemente in $A(n)$ ist $(E_n,0)$ und für $(A,a) \in A(n)$ ist das Inverse $(A,a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$. Die Menge aller Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ bildet eine Untergruppe von $A(n)$, die wir mit $E(n)$ bezeichnen.

Durch Identifikation der Menge der (n,n)-Matrizen mit reellen Koeffizienten mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ erhalten $A(n)$ und $E(n)$ Lie-Gruppen-Strukturen.

1.1 DEFINITION

Eine Untergruppe $\Gamma \subset E(n)$ heißt kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, falls

(a) Γ diskret

(b) $\mathbb{R}^n|\Gamma$ kompakt

ist.

Aus [18; 3.1.1] folgt:

1.2 BEMERKUNG

Eine Untergruppe $\Gamma \subset E(n)$ ist genau dann eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, wenn Γ diskret und $E(n)|\Gamma$ kompakt ist.

Die algebraische Struktur kristallographischer Gruppen des $\mathbb{R}^n$ hat L. Bieberbach in [1; XV] beschrieben (vgl. auch [7; III]):

1.3 SATZ (Bieberbach 1910)

Es sei Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{T} := \{\gamma \in \Gamma | \gamma = (E_n, t)\}$$

die Untergruppe der Translationen in Γ.

Dann ist $\mathcal{T} \cong \mathbf{Z}^n$ und $\mathcal{T}$ ist ein maximal abelscher Normalteiler von endlichem Index in Γ.

Insbesondere folgt für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$, wenn $\mathcal{T} \subset \Gamma$ die Untergruppe der Translationen und

$$G := \{A \in O(n) | \text{es gibt ein } a \in \mathbb{R}^n, \text{ so daß } (A,a) \in \Gamma \text{ ist}\}$$

ist, daß die Sequenz

1.4 $$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

exakt ist, wobei $i: \mathcal{T} \to \Gamma$ die natürliche Injektion und $p: \Gamma \to G$ die Projektion auf die O(n)-Teile bezeichne.

Ferner folgt, daß $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe ist, die effektiv auf $\mathcal{T}$ operiert.

Wählen wir im $\mathbb{R}^n$ eine Basis $\mathcal{B}$, die ein Erzeugendensystem von $\mathcal{T}$ ist, dann wird beim Übergang von der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ zu $\mathcal{B}$ die exakte Sequenz (1.4) in

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \bar{\Gamma} \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 1$$

transformiert, wobei

$$\bar{\Gamma} \subset \mathcal{M}(n) \otimes \mathbb{Z}^n$$
$$\bar{G} \subset \mathcal{M}(n) \text{ endlich,}$$

ist. Dabei bezeichne

$$\mathcal{M}(n) := \{A = (a_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R}) \mid |\det A| = 1 \text{ und für alle } i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ ist } a_{ij} \in \mathbb{Z}\} = GL(n,\mathbb{Z})$$

die Untergruppe der unimodular-ganzzahligen Matrizen von GL(n,ℝ) und

$$\mathcal{M}(n) \otimes \mathbb{Z}^n = \{(A,a) \in A(n) \mid A \in \mathcal{M}(n),\ a \in \mathbb{Z}^n\}$$

das semidirekte Produkt von $\mathcal{M}(n)$ und $\mathbb{Z}^n$.

Weil $G \subset O(n)$ ist, existiert eine symmetrische, positiv-defi-

nite Bilinearform s des $\mathbb{R}^n$, so daß für alle $g \in \bar{G}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$s(x,y) = s(gx, gy).$$

Eine Umkehrung von 1.3 hat H. Zassenhaus in [19; Satz 1] gezeigt:

1.5 SATZ (Zassenhaus 1947)

Ist Γ eine Gruppe, die einen maximal abelschen Normalteiler $\mathcal{T}$ von endlichem Index enthält, und ist $\mathcal{T} \cong \mathbb{Z}^n$, dann ist Γ isomorph zu einer kristallographischen Gruppe des $\mathbb{R}^n$.

Wegen 1.3 und 1.5 erhalten wir eine ein-eindeutige Zuordnung der Isomorphieklassen kristallographischer Gruppen des $\mathbb{R}^n$ zu den Äquivalenzklassen endlicher, effektiver Erweiterungen von $\mathbb{Z}^n$.

Nennen wir zwei kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$, die in $A(n)$ zueinander konjugiert sind, affin äquivalent, dann können wir L. Bieberbachs Ergebnis aus [2] wie folgt formulieren:

1.6 SATZ (Bieberbach 1911)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$.

Zwei kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann iso-

morph, wenn sie affin äquivalent sind.

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, für den es ein $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$ gibt, mit $\gamma(x) = x$, dann heißt x ein Fixpunkt von Γ. Ein Punkt des $\mathbb{R}^n$, der kein Fixpunkt von Γ ist, heißt Nicht-Fixpunkt von Γ.

1.7 BEMERKUNG

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, dann liegt die Menge der Nicht-Fixpunkte von Γ dicht im $\mathbb{R}^n$.

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $x_o \in \mathbb{R}^n$ ein Nicht-Fixpunkt von Γ, dann heißt

$$F_{x_o} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_o\| \leq \|\gamma(x) - x_o\| \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}$$

der "Dirichlet-Bereich" von Γ in x_o.

Es gilt:

$$\overset{\circ}{F}_{x_o} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_o\| < \|\gamma(x) - x_o\| \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, \gamma \neq id\} \neq \emptyset .$$

Ferner:

(1) F_{x_o} ist konvex .

(2) $\overline{\overset{\circ}{F}_{x_o}} = F_{x_o}$.

(3) Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt: Ist $\overset{\circ}{F}_{x_o} \cap \gamma(\overset{\circ}{F}_{x_o}) \neq \emptyset$, dann ist $\gamma = id$.

(4) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F_{x_o}) = \mathbb{R}^n$.

Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$, für die die Bedingungen (1) - (4) gelten, nennen wir einen "Fundamentalbereich" von Γ. Jeder solche Fundamentalbereich F ist kompakt. Ferner existieren nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$, für die $\gamma(F) \cap F \neq \emptyset$ ist.

Durch 1.7 wird sichergestellt, daß jede kristallographische Gruppe bestimmte Fundamentalbereiche, nämlich die Dirichlet-Bereiche, besitzt.

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^n$ ein Fundamentalbereich von Γ, dann ist für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $F \cap \gamma(F) \neq \emptyset$ die Menge $F \cap \gamma(F)$ konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem k-dimensionalen Ball B^k, wobei $0 \leq k \leq n$ ist.

Für jedes $\gamma \in \Gamma$, für das $F \cap \gamma(F)$ homöomorph zu B^{n-1} ist, nennen wir die Menge $\{\gamma, \gamma^{-1}\}$ eine "geometrische Erzeugende" von Γ bzgl. F.

Die Bezeichnung "geometrische Erzeugende" ist sinnvoll, denn es gilt:

Ist $\{\{\gamma_1,\gamma_1^{-1}\},\ldots,\{\gamma_r,\gamma_r^{-1}\}\}$ die Menge der geometrischen Erzeugenden von Γ bzgl. F, dann wird die Gruppe Γ (algebraisch) erzeugt von den Elementen $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$.

2. Quotientenräume

In diesem Kapitel werden Definitionen und Sätze über Quotientenräume reell- (semi-) analytischer Räume nach Transformationsgruppen zusammengestellt, die zur Beschreibung der in den folgenden Kapiteln auftretenden Räume dienen. Der Übersichtlichkeit halber definieren wir den Begriff des differenzierbaren Raumes nur so allgemein wie dafür erforderlich.

Eine entsprechend allgemeinere Darstellung, die auch die zugehörigen Beweise enthält, wird in [10] bzw. [12] geliefert.

2.1 DEFINITION

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Es heißt D lokal analytisch, wenn es zu jedem $x_o \in D$ eine Umgebung $U_{x_o} \subset \mathbb{R}^n$ von x_o und ferner endlich viele reell-analytische Funktionen

$$f_i : U_{x_o} \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,r$$

gibt, so daß

$$U_{x_o} \cap D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \text{ für alle } i = 1,\ldots,r\}$$

gilt.

(b) Es heißt D lokal semianalytisch, wenn es zu jedem $x_o \in D$ eine Umgebung $U_{x_o} \subset \mathbb{R}^n$ von x_o und ferner endlich viele reell-analytische Funktionen

$$f_{ij_i} : U_{x_o} \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,r \text{ und } j_i = 1,\ldots,r_i$$

$$g_{ik_i} : U_{x_o} \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,r \text{ und } k_i = 1,\ldots,s_i$$

gibt, so daß

$$U_{x_o} \cap D = \bigcup_{i=1}^{r} \Big(\bigcap_{j_i=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n | f_{ij_i}(x) = 0\} \cap \bigcap_{k_i=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n | g_{ik_i}(x) > 0\} \Big)$$

gilt.

2.2 DEFINITION

Es sei $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\omega\}$.

(a) Ist $D_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $D_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, dann heißt eine Abbildung

$$f: D_1 \to D_2$$

N-differenzierbar, wenn es zu jedem $x \in D_1$ eine offene Umgebung U_x von x und eine Abbildung

$$\hat{f}_x: U_x \to \mathbb{R}^{n_2}$$

der Klasse C^N gibt, so daß

$$f|_{D_1 \cap U_x} = \hat{f}_x|_{D_1 \cap U_x}$$

ist.

Ist f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} N-differenzierbar, dann heißt f ein N-Diffeomorphismus.

(b) Ist D ein topologischer Raum, dann heißt (U,f) eine Karte von D, wenn $U \subset D$ offen ist und ferner ein $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ existiert,

so daß

$$f: U \longrightarrow \tilde{D}$$

ein Homöomorphismus ist.

Eine Familie $\{(U_i,f_i)|i \in I\}$ von Karten von D heißt C^N-Atlas von D, wenn gilt:

(i) $\bigcup_{i\in I} U_i = D$

(ii) Für alle $i,j \in I$ folgt aus $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, daß

$$f_j \circ f_i^{-1}|_{f_i(U_i \cap U_j)}: f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$$

ein C^N-Diffeomorphismus ist.

Zwei C^N-Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ von D heißen äquivalent, wenn $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ein C^N-Atlas von D ist.

(c) Ein topologischer Raum D mit einer Äquivalenzklasse von C^N-Atlanten heißt N-differenzierbarer Raum.

Eine solche Äquivalenzklasse von C^N-Atlanten heißt N-differenzierbare Struktur auf D.

(d) Sind D_1 und D_2 zwei N-differenzierbare Räume, und ist

$$T: D_1 \longrightarrow D_2$$

eine stetige Abbildung, dann heißt T N-differenzierbar, wenn für jedes $x \in D_1$ Karten (U,f) von D_1 und (V,g) von D_2 existieren mit

$$x \in U$$

und

$$f(U) \subset V ,$$

so daß

$$g \circ T \circ f^{-1} \quad \text{N-differenzierbar}$$

ist.

Ist T bijektiv und sowohl T als auch T^{-1} differenzierbar, dann heißt T ein N-Diffeomorphismus und die beiden N-differenzierbaren Räume D_1 und D_2 heißen dann N-diffeomorph.

(e) Ein ω-differenzierbarer Raum D heißt lokal (semi-) analytisch, wenn D lokal ω-diffeomorph ist zu einer lokal (semi-) analytischen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Sind D_1 und D_2 zwei N-differenzierbare Räume, dann definieren die N-differenzierbaren Strukturen von D_1 und D_2 in natürlicher Weise eine N-differenzierbare Struktur auf dem topologischen Produktraum $D_1 \times D_2$. Mit dieser N-differenzierbaren Struktur nennen wir $D_1 \times D_2$ das direkte Produkt der N-differenzierbaren Räume D_1 und D_2.

2.3 DEFINITION (vgl. [10; II 1.2])

Es sei G eine C^ω-Lie-Gruppe und D ein ω-differenzierbarer Raum. Ist

$$\mu: G \times D \longrightarrow D$$

eine Operation (von links oder von rechts) von G auf D, dann heißt μ analytisch, wenn μ eine ω-differenzierbare Abbildung ist.

Die Operation μ heißt eigentlich, wenn die Abbildung

$$(\mu, p_2): G \times D \longrightarrow D \times D$$

eigentlich ist, wobei

$$p_2 : G \times D \longrightarrow D$$

die kanonische Projektion bezeichne.

Ist D' ein weiterer ω-differenzierbarer Raum, dann heißt eine ω-differenzierbare Abbildung $f: D \to D'$ G-invariant, falls gilt:

Für alle $g \in G$ und alle $x \in D$ ist

$$f(\mu(g,x)) = f(x).$$

2.4 DEFINITION (vgl. [10; II.1.10])

Es sei D ein ω-differenzierbarer Raum und G eine C^ω-Lie-Gruppe, ferner μ eine analytische Operation (von links oder von rechts) von G auf D.

Ein ω-differenzierbarer Raum D/G zusammen mit einer G-invarianten, ω-differenzierbaren Abbildung

$$\pi_G: D \longrightarrow D/G$$

heißt Quotient von D nach G, falls die folgende universelle Eigenschaft gilt:

Für jeden ω-differenzierbaren Raum D' und jede G-invariante, ω-differenzierbare Abbildung

$$f: D \longrightarrow D'$$

existiert genau eine ω-differenzierbare Abbildung

$$h: D/G \longrightarrow D',$$

so daß

$$f = h \circ \pi_G$$

ist.

Aus [10; II.1.11 und III.3.6] folgt:

2.5 SATZ

Ist D ein ω-differenzierbarer Raum und G eine C^ω-Lie-Gruppe, die analytisch und eigentlich auf D (von links oder von rechts) operiert, dann existiert ein bis auf ω-Diffeomorphie eindeutig bestimmter Quotient von D nach G.

Aus [10; III.3.1 und IV.2.7] folgt:

2.6 SATZ

Ist D ein ω-differenzierbarer, lokal semi-analytischer Raum und G eine C^{ω}-Lie-Gruppe, die analytisch und eigentlich auf D (von links oder von rechts) operiert, dann ist D/G ein lokal semi-analytischer, ω-differenzierbarer Raum.

3. G-INVARIANTE, POSITIV DEFINITE, SYMMETRISCHE BILINEARFORMEN

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und G eine Gruppe, die auf V operiert, ferner $s: V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform, dann sagen wir, s ist G-invariant, wenn für alle $g \in G$ und alle $x, y \in V$ gilt, daß

$$s(gx, gy) = s(x,y)$$

ist.

In diesem Kapitel wird die Menge aller G-invarianten, positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen des $\mathbb{R}^n$ untersucht, wobei $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe ist.

Ist G eine Gruppe, die auf einem Vektorraum V operiert, so daß für alle $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\to V \\ x &\to gx \end{aligned}$$

linear ist, dann heißt V ein G-Modul.

Ist $V' \subset V$ ein Untervektorraum, so daß $GV' \subset V'$ ist, so heißt V' ein invarianter G-Untermodul von V.

Sind $\{0\}$ und V die einzigen invarianten G-Untermoduln von V, dann heißt V ein einfacher G-Modul.

Ist W ein weiterer G-Modul und $\phi: V \to W$ ein Vektorraum-Homomorphismus, so daß für alle $x \in V$ und alle $g \in G$ gilt:

$$\phi(gx) = g\phi(x),$$

dann heißt ϕ ein G-Morphismus.

Ist darüber hinaus ϕ ein Vektorraumisomorphismus, dann heißt ϕ ein G-Isomorphismus und die G-Moduln V und W heißen G-isomorph.

Ist $\phi\colon V \to W$ ein G-Morphismus, dann ist $\operatorname{Ker}\phi \subset V$ ein invarianter G-Untermodul von V und $\operatorname{Im}\phi \subset W$ ein invarianter G-Untermodul von W. Daher gilt:

3.1 LEMMA (Schur)

Sind V und W einfache G-Moduln und ist

$$\phi\colon V \to W$$

ein G-Morphismus, dann ist entweder $\phi(V) = \{0\}$ oder ϕ ist ein G-Isomorphismus.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$ simultan $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Ist $V = W = \mathbb{K}^n$ und $G \subset GL(n,\mathbb{K})$, so daß der $\mathbb{K}^n$ ein einfacher G-Modul ist, und ist ferner $A_o \in M(n,\mathbb{K})$ eine Matrix, die einen Eigenwert $\lambda_o \in \mathbb{K}$ besitzt, und für die für alle $A \in G$ gilt

$$A\,A_o = A_o\,A,$$

dann definiert $A_o - \lambda_o E_n$ einen G-Morphismus von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$, der - weil $\det A_o - \lambda_o E_n = 0$ ist - kein G-Isomorphismus ist. Wegen 3.1 folgt, daß $A_o - \lambda_o E_n$ die Nullmatrix, also

3.2 $$A_o = \lambda_o E_n$$

ist. Ist auch $\det A_o = 0$, so ist A_o die Nullmatrix (vgl. [11; Proposition 4]).

Es sei $G \subset O(n)$ eine Untergruppe und $U \subset \mathbb{R}^n$ einer invarianter G-Untermodul des $\mathbb{R}^n$. Dann ist auch der Lotraum $U^\perp$ von U ein invarianter G-Untermodul.
Weil $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ ist, folgt:
Es existieren einfache, invariante G-Untermoduln $V_1,\ldots,V_k$ des $\mathbb{R}^n$, die paarweise orthogonal sind, und für die gilt:

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß die $V_1,\ldots,V_k$ so geordnet sind, daß ein $r \in \{1,\ldots,k\}$, ferner $k_1,\ldots,k_r \in \{1,\ldots,k\}$ existieren, so daß jeweils für $s_l := \sum_{\nu=1}^{l} k_\nu$, $l = 1,\ldots,r$

3.3
$$\begin{array}{l} V_1 \quad , \ldots, V_{s_1} \\ V_{s_1+1} \ , \ldots, V_{s_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ V_{s_{r-1}+1}, \ldots, V_{s_r} = V_k \end{array}$$

genau die einfachen, G-isomorphen, invarianten G-Untermoduln des $\mathbb{R}^n$ sind. Setzen wir $s_o := 0$ und $n_i := \dim V_i$ für alle $i = 1,\ldots,k$, dann kann für jedes $i = 1,\ldots,k$ in V_i eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_i$ so gewählt werden, daß für alle $B \in G$ die Operation von B auf

$$V_{s_{l-1}+1}, \ldots, V_{s_l}$$

für alle $l = 1,\ldots r$ durch dasselbe Element

$$B_l \in O(n_{s_{l-1}+1}) = \ldots\ldots = O(n_{s_l})$$

dargestellt wird.

Ist $B_o \in O(n)$ die Übergangsmatrix von der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ zur Basis $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)$, dann gilt für alle $B \in G$:

$$3.4 \quad B_o B B_o^t = \operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_1,\ldots,B_r) = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & B_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & B_r \end{pmatrix}$$

wobei jedes B_l genau k_l-mal auftritt, für $l = 1,\ldots,r$. Bei einer solchen Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ in paarweise orthogonale, einfache, invariante G-Untermoduln ist r eindeutig und sind die $k_1,\ldots,k_r$ eindeutig bis auf die Reihenfolge durch G bestimmt (vgl. [11, Theorem 8]).

Setzen wir

$$n_{(l)} := n_{s_l} \quad \text{für alle } l = 1,\ldots,r ,$$

dann ist

$$G_{(l)} := \{B_l \mid B \in G\}$$

eine Untergruppe von $O(n_{(l)})$, so daß der $\mathbb{R}^{n_{(l)}}$ ein einfacher

$G_{(1)}$-Modul ist.

Bezeichnen wir mit $M(n,\mathbb{K})$ die Menge aller (n,n)-Matrizen, deren Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ sind, dann sei für jede auf dem $\mathbb{K}^n$ operierende Gruppe G von (n,n)-Matrizen

$$V_G^{\mathbb{K}} := \{A \in M(n,\mathbb{K}) \mid AB = BA \text{ für alle } B \in G\}$$

Es entspricht $V_G^{\mathbb{K}}$ genau der Menge aller G-Endomorphismen des $\mathbb{K}^n$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, schreiben wir auch statt $V_G^{\mathbb{R}}$ einfacher V_G.

Es gilt:

3.5 SATZ

Ist $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe, so daß der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist, dann ist V_G ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 1 oder 2 oder 4.

BEWEIS

Die Menge aller G-Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra. Weil der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist, folgt mit 3.1 , daß die $\mathbb{R}$-Algebra nullteilerfrei ist und somit eine Divisionsalgebra ist. Aus [15, § 112] folgt, daß alle Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ entweder isomorph zu $\mathbb{R}$ oder isomorph zu $\mathbb{C}$ oder isomorph zum Schiefkörper der Quaternionen sind. Daraus folgt die Behauptung.

□

Für jede endliche Untergruppe $G \subset O(n)$, für die der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist, sagen wir:

G ist von 1. Art, falls dim $V_G = 1$,

G ist von 2. Art, falls dim $V_G = 2$,

G ist von 3. Art, falls dim $V_G = 4$.

Aus der Definition von V_G folgt:

Sind G_1 und G_2 endliche Untergruppen von $O(n)$, existiert ein $A_o \in GL(n,\mathbb{R})$, so daß

$$G_2 = A_o G_1 A_o^{-1}$$

ist, und ist der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G_i-Modul, für $i = 1, 2$, dann gilt:

3.6 $$V_{G_2} = A_o \, V_{G_1} \, A_o^{-1}$$

Ist $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe, dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß in der Zerlegung 3.3 des $\mathbb{R}^n$ in einfache, paarweise orthogonale, invariante G-Untermoduln die $V_1,\ldots,V_k$ so angeordnet sind, daß $l_1, l_2 \in \{0,\ldots,r\}$ existieren, so daß

3.7
$$\begin{array}{lll} G_{(1)}, \ldots, G_{(l_1)} & \text{von} & 1. \text{ Art} \\ G_{(l_1+1)}, \ldots, G_{(l_2)} & \text{von} & 2. \text{ Art} \\ G_{(l_2+1)}, \ldots, G_{(r)} & \text{von} & 3. \text{ Art} \end{array}$$

sind. Damit definieren wir:

$$\nu(G) := \sum_{j=1}^{l_1} \frac{1}{2} k_j(k_j+1) + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} k_j^2 + \sum_{j=l_2+1}^{r} k_j(2k_j-1) .$$

Es folgt mit 3.6 :

Ist $A_o \in GL(n,\mathbb{R})$ so, daß

$$G' := A_o G A_o^{-1} \subset O(n)$$

ist, dann ist

$$\nu(G') = \nu(G) .$$

Im folgenden bezeichnen wir mit

$$B(n) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) | A = A^t\}$$

die Menge der symmetrischen (n,n)-Matrizen mit reellen Koeffizienten.

Ferner identifizieren wir die Menge aller positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen des $\mathbb{R}^n$ mit

$$F(n) := \{C \in GL(n,\mathbb{R}) | \text{es existiert ein } A \in GL(n,\mathbb{R}) \text{ mit } A^tA = C\},$$

und für jede endliche Untergruppe $G \subset O(n)$ die Menge aller G-invarianten, positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen des $\mathbb{R}^n$ mit

$$F(G) := \{C \in F(n) | B^tCB = C \text{ für alle } B \in G\} .$$

Es gilt:

3.8 SATZ

Ist $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe, dann ist $F(G)$ eine konvexe, offene Teilmenge eines $\nu(G)$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums.

BEWEIS

Aus dem "Hurwitz-Kriterium" für positiv definite, symmetrische Bilinearformen folgt, daß

$$F(n) = \{C \in B(n) \mid \text{alle Hauptminoren von } C \text{ sind größer als } 0\}$$

ist, und damit, daß

3.9 $\qquad F(n) \subset B(n)$ offen ist.

Ferner gilt:

Weil für alle $C_1, C_2 \in F(n)$ und alle $t \in \leq 0, 1 \geq$ auch

$$tC_1 + (1 - t)\, C_2$$

eine positiv definite, symmetrische Bilinearform des $\mathbb{R}^n$ bestimmt, ist $F(n)$ eine konvexe Teilmenge des $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums $B(n)$. Daher ist auch für alle $C_1, C_2 \in F(G)$ und alle $t \in \leq 0, 1 \geq$

$$tC_1 + (1-t)C_2 \in F(G)$$

und es gilt:

3.10 F(G) ist konvexe Teilmenge von B(n).

Um die Behauptung zu zeigen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß die Basis des $\mathbb{R}^n$ so gewählt ist, daß jedes Element aus G die Gestalt aus 3.4 hat, und ferner 3.7 erfüllt ist.

Ist $C \in F(G)$, dann ist

$$BC = CB \quad \text{für alle } B \in G,$$

und es folgt aus 3.1, daß

$$C = \operatorname{diag}(\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_r)$$

ist, wobei für $i = 1,\ldots,r$ jedes $\tilde{C}_i$ die Gestalt hat:

$$\tilde{C}_i = \begin{pmatrix} C_{11}^{(i)} & \cdots\cdots & C_{1k_i}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{k_i1}^{(i)} & \cdots\cdots & C_{k_ik_i}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $C_{\lambda\mu}^{(i)}$ eine $(n_{(i)},n_{(i)})$-Matrix, für die gilt:

$$(C_{\lambda\mu}^{(i)})^t = C_{\mu\lambda}^{(i)}$$

für alle $i = 1,\ldots,r$ und alle $\lambda,\mu = 1,\ldots,k_i$. Insbesondere

ist für alle $\lambda = 1,\ldots,k_i$

$$C^{(i)}_{\lambda\lambda} \text{ symmetrisch.}$$

Ferner gilt:

3.11 $$C^{(i)}_{\lambda\mu} B_i = B_i C^{(i)}_{\lambda\mu}$$

für alle $B \in G$.

Daher folgt:

3.12 $$C^{(i)}_{\lambda\mu} \in V_{G_{(i)}} .$$

Weil die Matrix $C^{(i)}_{\lambda\lambda}$ symmetrisch ist, besitzt sie reelle Eigenwerte, und mit 3.2 folgt aus 3.11 , daß ein $c^{(i)}_{\lambda} \in \mathbb{R}$ existiert, so daß

3.13 $$C^{(i)}_{\lambda\lambda} = c^{(i)}_{\lambda} E_{n_{(i)}}$$

ist.

Wir definieren :

$\tilde{F}(G) := \{X \in B(n) | X = \mathrm{diag}(X_1,\ldots,X_r)$, und für alle $i = 1,\ldots,r$

sei

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{11}^{(i)} & X_{12}^{(i)} & \cdots\cdots\cdots\cdots & X_{1k_i}^{(i)} \\ (X_{12}^{(i)})^t & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ (X_{1k_i}^{(i)})^t & \cdots\cdots\cdots & & X_{k_ik_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} X_{\lambda\mu}^{(i)} &\in V_{G_{(i)}} \text{ falls } \lambda < \mu, \text{ und} \\ X_{\lambda\lambda}^{(i)} &\in \mathbb{R}\cdot E_{n_{(i)}} \end{aligned}\right\}.$$

Aus 3.5 und 3.7 folgt, daß $\tilde{F}(G)$ ein $\nu(G)$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $B(n)$ ist.

Aus 3.12 und 3.13 folgt:

3.14 $\qquad F(G) \subset \tilde{F}(G)$.

Andererseits gilt für jedes $X \in \tilde{F}(G)$:

$$XB = BX \quad \text{für alle } B \in G.$$

Daher ist $\tilde{F}(G) \cap F(n) \subset F(G)$ und wegen 3.14

$$\tilde{F}(G) \cap F(n) = F(G).$$

Weil gemäß 3.9 gilt, daß $F(n) \subset B(n)$ offen ist, folgt, daß

$$F(G) \subset \tilde{F}(G) \text{ offen}$$

ist.

Ferner gilt gemäß 3.10 ; daß F(G) eine konvexe Teilmenge von B(n) ist.

□

Die Berechnung von $\nu(G)$ hängt wesentlich davon ab, welche der Gruppen $G_{(1)},\ldots,G_{(r)}$ von 1. Art, welche von 2. Art und welche von 3. Art sind. Der folgende Satz liefert Kriterien, um das zu entscheiden.

3.15 SATZ

Es sei $G \subset O(n)$ eine endliche Untergruppe, so daß der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist. Dann gilt:

(a) G ist von 1. Art genau dann, wenn $\mathbb{C}^n$ ein einfacher G-Modul ist.

(b) G ist von 2. Art oder von 3. Art genau dann, wenn $n = 2m$ ist und

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$$

ist, wobei V_1 und V_2 einfache, invariante G-Untermoduln sind, mit

$$\dim_{\mathbb{C}} V_i = m \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Ferner gilt:

G ist von 2. Art genau dann, wenn V_1 und V_2 nicht G-isomorph sind.

BEWEIS

Es gilt:

$$V_G^{\mathbb{C}} = V_G^{\mathbb{R}} \oplus i \cdot V_G^{\mathbb{R}}$$

und damit

3.16 $$\dim_{\mathbb{C}} V_G^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V_G^{\mathbb{R}} .$$

Zu a):

Mit Hilfe von 3.2 folgt, daß $\mathbb{C}^n$ ein einfacher G-Modul genau dann ist, wenn $\dim_{\mathbb{C}} V_G^{\mathbb{C}} = 1$ ist.

Aus 3.16 folgt die Behauptung von (a).

Zu b):

Aus (a) folgt, daß G genau dann von 2. Art oder von 3. Art ist, wenn es zwei invariante G-Untermoduln V_1 und V_2 des $\mathbb{C}^n$ gibt, mit $V_i \neq \{0\}$, $\mathbb{C}^n$ für $i = 1,2$, so daß

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$$

ist.

Für jede solche Zerlegung des $\mathbb{C}^n$ gilt in diesem Fall: Weil $V_G^{\mathbb{R}}$ isomorph zu $\mathbb{C}$ oder zum Schiefkörper der Quaternionen ist (vgl. 3.5), existiert ein $A \in V_G^{\mathbb{R}}$ mit

$$A^2 = -E_n .$$

Dann ist

$$(\det A)^2 = \det A^2 = \det(-E_n),$$

und es folgt, daß n gerade ist. Sei nun also $n = 2m$. Weil $G \subset O(n)$ ist, ist $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ ebenfalls G-invariant; daher ist $V_i \cap \mathbb{R}^n$ auch G-invariant für $i = 1,2$. Weil $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist und weil ferner für $i = 1,2$ gilt, daß $V_i \neq \mathbb{C}^n$ ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum des $\mathbb{C}^n$ ist, folgt:

$$V_i \cap \mathbb{R}^n = \{0\} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Daher ist

$$\dim_{\mathbb{R}} V_i \leq n \quad \text{für } i = 1, 2$$

und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} V_i \leq m \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Weil $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ ist, folgt:

3.17 $$\dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_2 = m.$$

Weil 3.17 für jede Zerlegung des $\mathbb{C}^n$ in invariante G-Untermoduln gilt, folgt, daß V_1 und V_2 einfache G-Moduln sind.

Mit Hilfe von 3.1 folgt, daß $\dim_{\mathbb{C}} V_G^{\mathbb{C}} = 2$ genau dann ist, wenn V_1 und V_2 nicht G-isomorph sind.

Aus 3.16 folgt damit, daß G genau dann von 2. Art ist, wenn

V_1 und V_2 nicht G-isomorph sind.

□

Für Gruppen der 1. Art und 2. Art gibt es Beispiele im Fall n = 2: Ist G eine Diedergruppe mit mehr als zwei Elementen, dann gilt gemäß 3.15 (a), daß G von 1. Art ist.

Ist G eine Gruppe, die ausschließlich aus Drehungen besteht, dann ist G gemäß 3.15 (b) von 2. Art.

Als Beispiel für eine Gruppe 3. Art dient eine Untergruppe von O(4):

3.18 BEMERKUNG

Es sei G die von den beiden Elementen

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von O(4).

Dann gilt:

(a) G ist endlich;

denn G ist eine diskrete Untergruppe der kompakten Gruppe O(4).

(b) $\mathbb{R}^4$ ist ein einfacher G-Modul;

denn für jede symmetrische (4,4)-Matrix M mit reellen Koeffizienten, für die gilt:

$BM = MB$ für alle $B \in G$,

folgt, daß M die Form

$$M = a \cdot E_4, \quad a \in \mathbb{R}$$

besitzt; aus 3.4 folgt damit, daß der $\mathbb{R}^4$ ein einfacher G-Modul ist.

(c) $\mathbb{C}^4$ ist direkte Summe zweier invarianter G-Untermoduln, die G-isomorph sind;

denn setzen wir

$$S := \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\tilde{B}_1 := SB_1\bar{S}^t = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 := SB_2\bar{S}^t = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$\tilde{V}_1 := \{(c_1, c_2, 0, 0)^t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$
$$\tilde{V}_2 := \{(0, 0, c_1, c_2)^t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\},$$

dann sind

$$V_1 := S\tilde{V}_1 \quad \text{und} \quad V_2 := S\tilde{V}_2$$

die beiden invarianten G-Untermoduln des $\mathbb{C}^4$. Fer-

ner gilt für $\tilde{G} := SG\bar{S}^t$, daß die Matrix

$$\tilde{A}_o := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

einen $\tilde{G}$-Isomorphismus von $\tilde{V}_1$ auf $\tilde{V}_2$ definiert.

Also wird durch

$$A_o := \bar{S}^t \tilde{A}_o S$$

ein G-Isomorphismus von V_1 auf V_2 definiert.

Aus (a) - (C) sowie 3.15 (b) folgt, daß G von 3. Art ist.

□

4. Die Modulräume

Jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ ist endlich erzeugbar. Ein Erzeugendensystem von Γ nennen wir ein geordnetes r-Tupel

$$\mathcal{E} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$$

von Elementen aus Γ, die die Gruppe Γ erzeugen. Für jedes $\alpha \in A(n)$ setzen wir

$$\alpha \mathcal{E} \alpha^{-1} := (\alpha\gamma_1\alpha^{-1}, \ldots, \alpha\gamma_r\alpha^{-1}).$$

Zwei kristallographische Gruppen Γ_1 und Γ_2 des $\mathbb{R}^n$ heißen euklidisch äquivalent, wenn ein $\beta \in E(n)$ existiert, so daß

$$\beta\Gamma_1\beta^{-1} = \Gamma_2$$

ist. Sind $\mathcal{E}_i$ Erzeugendensysteme von Γ_i für $i = 1, 2$, dann heißen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ euklidisch äquivalent, falls ein $\beta \in E(n)$ existiert, so daß

$$\beta \mathcal{E}_1 \beta^{-1} = \mathcal{E}_2$$

ist. Auf diese Weise wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der kristallographischen Gruppen des $\mathbb{R}^n$ bzw. auf der Menge ihrer Erzeugendensysteme erklärt.

Für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die euklidische Äquivalenzklasse mit $\hat{\Gamma}$ und für jedes Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von Γ die euklidische Äquivalenzklasse mit $\hat{\mathcal{E}}$.

Gemäß 1.6 zerfällt die Menge der kristallographischen Gruppen des $\mathbb{R}^n$ in endlich viele affine Äquivalenzklassen. Wir beschränken uns daher darauf zu untersuchen, in welche euklidischen Äquivalenzklassen eine affine Äquivalenzklasse kristallographischer Gruppen des $\mathbb{R}^n$ zerfällt. Dementsprechend untersuchen wir für jedes Erzeugendensystem $\mathcal{E}$, in welche euklidischen Äquivalenzklassen die Menge

$$\{\mathcal{E}' \mid \text{es existiert ein } \alpha \in A(n) \text{ mit } \mathcal{E}' = \alpha\mathcal{E}\alpha^{-1}\}$$

zerfällt.

4.1 DEFINITION

Es sei Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$.

(a) $\mathcal{M}(\Gamma) := \{\hat{\Gamma}' \mid$ es existiert ein $\alpha \in A(n)$ mit $\Gamma' = \alpha\Gamma\alpha^{-1}$ und $\Gamma' \subset E(n)\}$.

(b) Für jedes Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von Γ sei

$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) := \{\hat{\mathcal{E}}' \mid$ es existiert ein $\alpha \in A(n)$ mit $\mathcal{E}' = \alpha\mathcal{E}\alpha^{-1}$ und alle Elemente aus $\mathcal{E}'$ sind Bewegungen$\}$.

Aus 1.6 folgt, daß für zwei isomorphe kristallographische Gruppe Γ_1 und Γ_2 gilt, daß $\mathcal{M}(\Gamma_1) = \mathcal{M}(\Gamma_2)$ ist.

Im folgenden werden die in 4.1 definierten Mengen mit einer analytischen Struktur versehen.

4.2 DEFINITION

Für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ sei

(a) $R(\Gamma) := \{\alpha \in A(n) | \alpha\Gamma\alpha^{-1} \subset E(n)\}$

(b) $N(\Gamma) := \{\alpha \in A(n) | \alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma\}$

(c) $\tilde{N}(\Gamma) := \{\alpha \in A(n) |$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt: $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \gamma\}$.

4.3 BEMERKUNG

Es sei Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$.

(a) Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ, dann ist

$$\{\alpha \in A(n) | \alpha\, \mathcal{E}\, \alpha^{-1} = \mathcal{E}\} = \tilde{N}(\Gamma).$$

(b) $\tilde{N}(\Gamma) \subset \{(E_n, t) | t \in \mathbb{R}^n\}$.

BEWEIS

Weil $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ ist, folgt (a) unmittelbar aus der Definition von $\tilde{N}(\Gamma)$.

Zu (b):

Es sei $\mathcal{T}$ die Untergruppe der in Γ enthaltenen Translationen. Weil $\mathcal{T} \cong \mathbb{Z}^n$ ist, existieren

$$\tau_i := (E_n, t_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

in Γ, so daß $t_1, \ldots, t_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Für alle $\alpha \in \tilde{N}(\Gamma)$ und alle $i = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$\alpha\tau_i\alpha^{-1} = \tau_i.$$

Weil $t_1,\ldots,t_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt daraus, daß α die Gestalt

$$\alpha = (E_n,t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

hat.

□

Weil für jede kristallographische Gruppe Γ gilt, daß $R(\Gamma)$ als Nullstellenmenge endlich vieler analytischer Funktionen darstellbar ist, ist $R(\Gamma)$ lokal analytisch. Ferner ist $E(n)$ eine C^ω-Lie-Gruppe und

$$\begin{aligned} E(n) \times R(\Gamma) &\longrightarrow R(\Gamma) \\ (\beta,\alpha) &\longmapsto \beta\alpha \end{aligned}$$

eine analytische Operation von links von $E(n)$ auf $R(\Gamma)$. Diese Operation ist eigentlich, und wir bezeichnen den gemäß 2.5 eindeutig bestimmten Quotienten mit $E(n)\backslash R(\Gamma)$.

Gemäß 2.6 ist $E(n)\backslash R(\Gamma)$ ein semianalytischer Raum. Ferner ist sowohl $N(\Gamma)$ als auch $\tilde{N}(\Gamma)$ eine C^ω-Lie-Gruppe. Im folgenden bezeichnen wir simultan sowohl $N(\Gamma)$ als auch $\tilde{N}(\Gamma)$ mit N. Dann ist

$$\begin{aligned} R(\Gamma) \times N &\longrightarrow R(\Gamma) \\ (\alpha,\alpha') &\longmapsto \alpha\alpha' \end{aligned}$$

eine analytische, eigentliche Operation von rechts von N auf $R(\Gamma)$.

Ferner operiert $E(n)$ analytisch und eigentlich von links auf

$R(\Gamma) \times N$ durch

$$\begin{array}{ccc} E(n) \times (R(\Gamma) \times N) & \longrightarrow & R(\Gamma) \times N \\ (\beta(\alpha,\alpha')) & \longrightarrow & (\beta\alpha,\alpha') \,. \end{array}$$

Der gemäß 2.5 eindeutig bestimmte Quotient ist

$$E(n)\backslash(R(\Gamma) \times N) = (E(n)\backslash R(\Gamma)) \times N.$$

Bezeichnen wir nun für jedes $\alpha \in R(\Gamma)$ den durch α repräsentierten Orbit in $E(n)\backslash R(\Gamma)$ mit $\hat{\alpha}$, dann folgt:

4.4 BEMERKUNG

Durch

$$\begin{array}{ccc} (E(n)\backslash R(\Gamma)) \times N & \longrightarrow & E(n)\backslash R(\Gamma) \\ (\hat{\alpha},\alpha') & \longmapsto & \widehat{\alpha\alpha'} \end{array}$$

wird eine analytische Operation von rechts von N auf $E(n)\backslash R(\Gamma)$ definiert.

Für $N = \tilde{N}(\Gamma)$ ist diese Operation trivial.

BEWEIS

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} R(\Gamma) \times N & \longrightarrow & E(n)\backslash R(\Gamma) \\ (\alpha,\alpha') & \longmapsto & \widehat{\alpha\alpha'} \end{array}$$

ist analytisch und $E(n)$-invariant.

Daher existiert genau eine analytische Abbildung

$$m: (E(n)\backslash R(\Gamma)) \times N \longrightarrow (E(n)\backslash R(\Gamma)) \times N$$

für die gilt:

Für alle $(\alpha,\alpha') \in R(\Gamma) \times N$ ist

$$m(\hat{\alpha},\alpha') = \alpha\alpha'.$$

Also ist die oben definierte Operation wohldefiniert und analytisch.

Aus 4.3 (b) folgt, daß für $N = \tilde{N}(\Gamma)$ die Operation trivial ist.

□

Im folgenden bezeichnen wir die natürliche Projektion von $A(n)$ auf $GL(n,\mathbb{R})$ mit $\alpha^* = A$ für jedes $\alpha = (A,a)$

M^* für jede Teilmenge $M \subset A(n)$.

Auf $R(\Gamma)^*$ operiert $O(n)$ analytisch und eigentlich von links, und die natürliche Projektion

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 : R(\Gamma) &\longrightarrow R(\Gamma)^* \\ \alpha &\longmapsto \alpha^* \end{aligned}$$

induziert eine bianalytische Abbildung der Quotienten:

$$\hat{p}_1 : E(n)\backslash R(\Gamma) \longrightarrow O(n)\backslash R(\Gamma)^*.$$

Ferner operiert N^* analytisch von rechts auf $O(n)\backslash R(\Gamma)^*$, und für $\hat{p}_1$ gilt:

4.5 $$\hat{p}_1(\hat{a}\alpha') = \hat{a}^*\alpha'^* = \widehat{\alpha^*\alpha'^*}$$

für alle $\hat{a} \in E(n)\backslash R(\Gamma)$ und $\alpha' \in N$, wobei mit $\hat{a}^*$ der Orbit bezeichnet sei, den α^* in $O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ repräsentiert.

4.6 BEMERKUNG

Weil $O(n)$ kompakt ist, und weil N^* eigentlich auf $R(\Gamma)^*$ operiert, folgt, daß auch die Operation von N^* auf $O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ eigentlich ist und somit wegen 2.5 ein eindeutig bestimmter Quotient $O(n)\backslash R(\Gamma)^*/N^*$ existiert. Weil p_1 bianalytisch ist, folgt mit 4.5:

Es existiert ein eindeutig bestimmter Quotient

$$E(n)\backslash R(\Gamma)/N$$

von $E(n)\backslash R(\Gamma)$ nach N.

Ferner induziert wegen 4.5 die Abbildung $\hat{p}_1$ eine bianalytische Abbildung

$$\hat{\hat{p}}_1 : E(n)\backslash R(\Gamma)/N \longrightarrow O(n)\backslash R(\Gamma)^*/N^*.$$

Für den Fall $N = \tilde{N}(\Gamma)$ gilt wegen 4.3 (b):

$$\tilde{N}(\Gamma)^* = \{E_n\};$$

mithin ist

$$E(n)\backslash R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma) = E(n)\backslash R(\Gamma)$$

und

$$O(n)\backslash R(\Gamma)^*/\tilde{N}(\Gamma)^* = O(n)\backslash R(\Gamma)^*.$$

Indem wir nun $\mathcal{M}(\Gamma)$ mit $E(n)\backslash R(\Gamma)/N(\Gamma)$
und $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ mit $E(n)\backslash R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma) = E(n)\backslash R(\Gamma)$
identifizieren, erhalten $\mathcal{M}(\Gamma)$ und $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ analytische Strukturen.

Die so auf $\mathcal{M}(\Gamma)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ definierte analytische Struktur ist unabhängig von der Wahl des Γ bzw. $\mathcal{E}$ aus der affinen Äquivalenzklasse von Γ bzw. $\mathcal{E}$, denn:
Sind Γ' bzw. $\mathcal{E}'$ beliebige Repräsentanten der affinen Äquivalenzklasse von Γ bzw. $\mathcal{E}$, dann existiert ein $\alpha_o \in A(n)$ mit

$$\Gamma' = \alpha_o \Gamma \alpha_o^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}' = \alpha_o \mathcal{E} \alpha_o^{-1} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R(\Gamma') &= R(\Gamma)\cdot\alpha_o^{-1} \\ N(\Gamma') &= N(\Gamma)\cdot\alpha_o^{-1} \\ \tilde{N}(\Gamma') &= \tilde{N}(\Gamma)\cdot\alpha_o^{-1} . \end{aligned}$$

Daher induziert α_o eine bianalytische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} E(n)\backslash R(\Gamma') & \longrightarrow & E(n)\backslash R(\Gamma) \\ \hat{\alpha} & \longmapsto & \hat{\alpha}\alpha_o \end{array}$$

und eine bianalytische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} E(n)\backslash R(\Gamma')/N(\Gamma') & \longrightarrow & E(n)\backslash R(\Gamma)/N(\Gamma) \\ [\hat{\alpha}'] & \longmapsto & [\hat{\alpha}\alpha_o] \end{array} .$$

Die Räume $\mathcal{M}(\Gamma)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ stehen in Analogie zu den Räumen der verschiedenen komplex-analytischen Strukturen einer geschlossenen orientierbaren Fläche F bzw. zu den Räumen der Strukturen der verschiedenen zu F gehörigen markierten Riemannschen Flächen (vgl. [20; § VI. 6]).

Bezeichnen wir im folgenden mit $\mathbb{H}$ den Einheitskreis, mit Aut $\mathbb{H}$ die Menge aller konformen Homöomorphismen von $\mathbb{H}$ und mit $G \subset \text{Aut}\,\mathbb{H}$ eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf $\mathbb{H}$ operiert, so daß $\mathbb{H}/G$ homöomorph zu F ist, dann gelten die folgenden Entsprechungen:

$R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma)$ repräsentiert die Menge der Monomorphismen

$$h: \Gamma \longrightarrow E(n);$$

entsprechend:
Wählt man ein geometrisches Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von G, dann repräsentiert die Menge der Monomorphismen

$$h: G \longrightarrow \text{Aut}\,\mathbb{H}$$

eine Menge von geometrischen Erzeugendensystemen. Diese Menge repräsentiert genau die Menge der zu F gehörigen markierten Riemannschen Flächen.

Durch die Quotientenbildung $E(n)\backslash R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma)$ werden solche Monomorphismen

$$h: \Gamma \longrightarrow E(n)$$

miteinander identifiziert, die durch Konjugation mit einem Element aus E(n) ineinander überführbar sind;

entsprechend:

Identifiziert man solche Monomorphismen

$$h: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{H},$$

die durch Konjugation mit einem Element aus Aut $\mathbb{H}$ ineinander überführbar sind, so entspricht dem die Identifikation holomorph äquivalenter markierter Riemannscher Flächen, d.h.: der Quotient $E(n)\backslash R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma)$ steht in Analogie zu dem zu F gehörigen Teichmüllerschen Raum.

Durch die Quotientenbildung $E(n)\backslash R(\Gamma)/N(\Gamma)$ werden solche Monomorphismenklassen

$$\bar{h}_i \in E(n)\backslash R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma) = E(n)\backslash R(\Gamma) \quad i = 1, 2$$

miteinander identifiziert, für deren Repräsentanten $h_i \in R(\Gamma)/\tilde{N}(\Gamma)$ gilt:

$$h_1(\Gamma) = h_2(\Gamma);$$

entsprechend:

Der Raum, der entsteht durch Identifikation der Monomorphismenklassen $\bar{h}_i$, $i = 1, 2$, mit Repräsentanten

$$h_i: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{H},$$

für die gilt:

$$h_1(G) = h_2(G),$$

entspricht genau dem Raum aller komplex-analytischen Strukturen von F.

Diese Analogie wird im 7. Kapitel dieser Arbeit weiterverfolgt.

Um nun die Räume $\mathcal{M}(\Gamma)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ zu beschreiben, definieren wir nun relativ leicht berechenbare Räume, auf die wir $\mathcal{M}(\Gamma)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ bianalytisch abbilden können. Im Unterschied zu $\mathcal{M}(\Gamma)$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ sind aber diese sogenannten Modulräume $M(\Gamma)$ bzw. $\tilde{M}(\mathcal{E})$ abhängig von der Auszeichnung der Gruppe Γ bzw. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}$. Sind Γ und Γ' bzw. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ Gruppen bzw. Erzeugendensysteme, die affin äquivalent sind, dann läßt sich der Übergang von $M(\Gamma)$ zu $M(\Gamma')$ bzw. von $\tilde{M}(\mathcal{E})$ zu $\tilde{M}(\mathcal{E}')$ durch eine entsprechende "Koordinatentransformation" beschreiben.

Es sei nun Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und

$$0 \to \mathcal{T} \to \Gamma \to G \to 1$$

die exakte Sequenz gemäß 1.4 .

Die Menge $F(G)$ aller G-invarianten, positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen des $\mathbb{R}^n$ ist als Nullstellenmenge endlich vieler analytischer Funktionen darstellbar und somit lokal analytisch. Ferner wird durch

$$\begin{aligned} F(G) \times N(\Gamma)^* &\longrightarrow F(G) \\ (C,A) &\longmapsto A^t CA =: C \cdot A \end{aligned}$$

eine analytische Operation von rechts von $N(\Gamma)^*$ auf $F(G)$ definiert. Es gilt:

4.7 SATZ

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 \colon O(n)\backslash R(\Gamma)^* &\longrightarrow F(G) \\ \hat{A} &\longmapsto A^tA \end{aligned}$$

ist bianalytisch.

Ferner gilt für alle $A \in O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ und $A' \in N(\Gamma)^*$:

$$\hat{p}_2(\hat{A}A') = \hat{p}_2(\hat{A})\cdot A'.$$

BEWEIS

Ist $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \in O(n)\backslash R(\Gamma)^*$, dann existiert ein $B \in O(n)$ mit $A_2 = BA_1$. Dann ist

$$\hat{p}_2(\hat{A}_2) = A_2^tA_2 = A_1^tB^tBA_1 = A_1^tA_1 = \hat{p}_2(\hat{A}_1).$$

Ferner gilt für jedes $A \in R(\Gamma)^*$:

$$AGA^{-1} \subset O(n).$$

Also gilt für alle $B \in G$:

$$(ABA^{-1})^t\, ABA^{-1} = E_n$$

und damit

$$B^t(A^tA)B = A^tA.$$

Für jedes $\hat{A} \in O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ ist also $\hat{p}_2(\hat{A}) = A^tA \in F(G)$. Also ist $\hat{p}_2$ eine wohldefinierte Abbildung. Weil

$$\begin{aligned} p_2\colon R(\Gamma)^* &\longrightarrow F(G) \\ A &\longmapsto A^tA \end{aligned}$$

eine wohldefinierte analytische Abbildung ist, ist (vgl. 2.4) auch $\hat{p}_2$ eine analytische Abbildung.
Ist $C \in F(n)$, dann definiert C eine positiv definite, symmetrische Bilinearform des $\mathbb{R}^n$. Bezeichnen wir mit r(C) die Matrix, deren Spalten gerade die Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind, die man erhält, in dem man auf die kanonische Basis $(e_1,\ldots,e_n)$ des $\mathbb{R}^n$ das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwendet, dann ist

$$(r(C))^t\ C\ r(C) = E_n.$$

Es sei nun

$$\begin{aligned} s\colon F(n) &\longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \\ C &\longmapsto (r(C))^{-1}. \end{aligned}$$

Weil das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren analytisch von den Koeffizienten der Matrix der positiv definiten Bilinearform abhängt, ferner das Invertieren von Matrizen eine analytische Abbildung ist, ist s eine analytische Abbildung, für die gilt:

$$(s(C))^t\ s(C) = C.$$

Falls $C \in F(G)$ ist, folgt für alle $B \in G$ aus

$$B^t s(C)^t s(C) B = s(C)^t s(C),$$

daß

$$(s(C)Bs(C)^{-1})^t (s(C)Bs(C)^{-1}) = E_n$$

und damit

$$s(C)Bs(C)^{-1} \in O(n)$$

ist. Also ist

$$s|_{F(G)}: F(G) \longrightarrow R(\Gamma)^*$$

eine wohldefinierte analytische Abbildung.

Daraus folgt, daß die Umkehrabbildung von $\hat{p}_2$

$$\begin{aligned} \hat{p}_2^{-1}: F(G) &\longrightarrow O(n)\backslash R(\Gamma)^* \\ C &\longmapsto \widehat{s(C)} \end{aligned}$$

wohldefiniert und analytisch ist.

Damit ist gezeigt, daß $\hat{p}_2$ bianalytisch ist.

Ist nun $\hat{A} \in O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ und $A' \in N(\Gamma)^*$, dann gilt:

$$\hat{p}_2(\hat{A}A') = \hat{p}_2(\widehat{AA'}) = (AA')^t(AA') = A'^t A^t AA' = \hat{p}_2(\hat{A}) \cdot A'.$$

□

Weil gemäß 4.6 $N(\Gamma)^*$ eigentlich auf $O(n)\backslash R(\Gamma)^*$ operiert, folgt mit 4.7, daß $N(\Gamma)^*$ auch eigentlich auf $F(G)$ operiert. Es existiert gemäß 2.5 daher ein eindeutig bestimmter Quotient $F(G)/N(\Gamma)^*$. Ferner gilt:

4.8 KOROLLAR

Die Abbildung $\hat{p}_2$ induziert eine bianalytische Abbildung

$$\hat{\hat{p}}_2 : O(n)\backslash R(\Gamma)^*/N(\Gamma)^* \longrightarrow F(G)/N(\Gamma)^* .$$

□

4.9 DEFINITION

Es sei Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und

$$0 \to \mathcal{T} \to \Gamma \to G \to 1$$

die exakte Sequenz gemäß 1.4, und $\mathcal{E}$ sei ein Erzeugendensystem von Γ. Dann nennen wir

$\tilde{M}(\mathcal{E}) := F(G)$ den Modulraum von $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ und

$M(\Gamma) := F(G)/N(\Gamma)^*$ den Modulraum von $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Aus 4.7 und 4.8 folgt, daß $\hat{p}_2 \circ \hat{p}_1$ bzw. $\hat{\hat{p}}_2 \circ \hat{\hat{p}}_1$ bianalytische Abbildungen von $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ nach $\tilde{M}(\mathcal{E})$ bzw. $\mathcal{M}(\Gamma)$ nach $M(\Gamma)$ definieren. Setzen wir

$$\nu^*(\Gamma) := \nu(G),$$

dann gilt:

4.10 SATZ

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ, dann gilt:

(a) Es ist $\tilde{M}(\mathcal{E})$ eine konvexe, offene Teilmenge eines $\nu^*(\Gamma)$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums.

(b) Es ist $M(\Gamma)$ ein lokal semianalytischer Raum der Dimension $\nu^*(\Gamma)$.

BEWEIS

Die Behauptung von (a) folgt unmittelbar aus 3.8 .
Zu (b): Weil $N(\Gamma)^*$ eigentlich und analytisch auf dem lokal semianalytischen Raum $F(G)$ operiert, folgt mit 2.6 , daß auch $M(\Gamma)$ ein lokal semianalytischer Raum ist.

Weil die Untergruppe $\mathcal{T}$ der Translationen von Γ charakteristische Untergruppe von Γ ist, gilt für jedes $\alpha \in N(\Gamma)$:

$$\alpha \mathcal{T} \alpha^{-1} = \mathcal{T}.$$

Daraus folgt, weil gemäß 1.3 gilt, daß $\mathcal{T} \cong \mathbb{Z}^n$ ist, daß $N(\Gamma)^*$ in $GL(n,\mathbb{R})$ konjugiert ist zu einer Untergruppe von $GL(n,\mathbb{Z})$. Mithin ist $N(\Gamma)^*$ diskret.

Weil $N(\Gamma)^*$ auf $F(G)$ eigentlich operiert, folgt, daß $N(\Gamma)^*$ auf $F(G)$ eigentlich diskontinuierlich operiert. Daraus folgt

$$\dim M(\Gamma) = \nu^*(\Gamma).$$

□

Es gilt ferner:

$$1 \leq \dim \tilde{M}(\mathcal{E}) = \dim M(\Gamma) \leq \frac{1}{2} n(n+1) \ ;$$

und für jede kristallographische Gruppe Γ' des $\mathbb{R}^n$ mit $\Gamma' \subset \Gamma$ gilt:

$$\dim M(\Gamma) \leq \dim M(\Gamma') \ .$$

Es sei im folgenden Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, ferner $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ und

$$0 \to \mathcal{T} \to \Gamma \to G \to 1$$

die exakte Sequenz gemäß 1.4 .

Dann heißt ein $C_o \in F(G)$ Nicht-Fixpunkt von $N(\Gamma)^*$, wenn für jedes $A \in N(\Gamma)^*$ aus $C_o \cdot A = C_o$ folgt, daß $C \cdot A = C$ für alle $C \in F(G)$ gilt. Andernfalls heißt C_o Fixpunkt von $N(\Gamma)^*$.

Weil $N(\Gamma)^*$ eigentlich diskontinuierlich auf $F(G)$ operiert, existiert zu jedem Nicht-Fixpunkt $C_o \in F(G)$ von $N(\Gamma)^*$ eine Umgebung von C_o, die durch die kanonische Projektion

$$F(G) \longrightarrow F(G)/N(\Gamma)^*$$

bianalytisch auf eine Umgebung von $[C_o] \in F(G)/N(\Gamma)^*$ abgebildet wird. Weil ferner für jedes $A \in N(\Gamma)^*$ die Menge

$$S_A := \{C \in F(G) \mid C \cdot A = C\}$$

konvex und abgeschlossen ist, folgt:

4.11 KOROLLAR

$M(\Gamma)$ enthält eine $\nu^*(\Gamma)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M_o(\Gamma)$ als offene, dichte Teilmenge.

□

Ferner gilt wegen 3.1 und 3.2:

4.12 KOROLLAR

Falls der $\mathbb{R}^n$ ein einfacher G-Modul ist, folgt, daß

$$F(G) = \{c \cdot E_n \mid c \in \mathbb{R}_+^*\}$$

und, weil $N(\Gamma)^*$ dann trivial auf $F(G)$ operiert,

$$\tilde{M}(\mathcal{E}) = M(\Gamma) = F(G)$$

ist. □

Es seien Γ_i, $i = 1,2$, kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$ und

$$0 \to \mathcal{T}_i \to \Gamma_i \to G_i \to 1$$

die exakten Sequenzen gemäß 1.4 . Ferner sei $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Dann folgt auch, daß $G_1 \subset G_2$ und damit, daß

$$F(G_2) \subset F(G_1)$$

ist. Offenbar ist $F(G_2)$ eine analytische Untermannigfaltigkeit von $F(G_1)$. Sind also $\mathcal{E}_i$ Erzeugendensysteme von Γ_i, dann

ist

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_2) \subset \tilde{M}(\mathcal{E}_1)$$

Untermannigfaltigkeit, und wir erhalten somit eine analytische Einbettung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E}_2) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{E}_1) \\ \alpha\widehat{\mathcal{E}_2}\alpha^{-1} &\longrightarrow \alpha\widehat{\mathcal{E}_1}\alpha^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Falls Γ_1 eine charakteristische Untergruppe von Γ_2 ist, induziert die natürliche Inklusion

$$F(G_2) \longrightarrow F(G_1)$$

eine analytische Abbildung

$$\iota : F(G_2)/N(\Gamma_2)^* \longrightarrow F(G_1)/N(\Gamma_1)^* ,$$

die allerdings im allgemeinen nicht injektiv ist.
Dazu folgendes

BEISPIEL

Es seien folgende kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^4$ definiert:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{(E_2, \begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix}) | a, b \in \mathbb{Z}\} \\ \Gamma_1' &:= \{(E_2, \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}) | a, b \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Offenbar sind Γ_1 und Γ_1' euklidisch äquivalent.

Ferner seien

$$G := \{E_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

und

$$\Gamma_2 := \{(B, \begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix}) | B \in G,\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Gamma_2' := \{(B, \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}) | B \in G,\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$$

Für $\alpha_o := (A_o, 0)$ mit

$$A_o := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\Gamma_2' = \alpha_o \Gamma_2 \alpha_o^{-1}$$

Also sind Γ_2 und Γ_2' affin äquivalent.

Angenommen, es gibt ein $\alpha = (A,a) \in E(2)$, für das

$$\alpha \Gamma_2 \alpha^{-1} = \Gamma_2'$$

ist, dann gilt auch

$$\alpha \Gamma_1 \alpha^{-1} = \Gamma_1'$$

und es folgt, daß A die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } a_1,\ a_2 \in \{-1,1\}$$

hat. Damit folgt aber, daß

$$AGA^{-1} = \{E_4, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} \neq G$$

und somit auch

$$\alpha\Gamma_2\alpha^{-1} \neq \Gamma_2'$$

ist. Also sind Γ_2 und Γ_2' nicht euklidisch äquivalent.

Es werden demnach $\hat{\Gamma}_2$ und $\hat{\Gamma}_2'$ in $F(G)/N(\Gamma_2)^*$ durch verschiedene Elemente repräsentiert, während diese aber mit ι in $F(\{E_2\})/N(\Gamma_1)^*$ beide auf das Element abgebildet werden, das $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_1'$ repräsentiert.

5. Induzierte Metriken

Für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ wird durch Γ eine Metrik auf dem Orbitraum $\mathbb{R}^n/\Gamma$ induziert:

5.1 DEFINITION

Es sei Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

die natürliche Projektion.

Dann heißt die durch

$$|\bar{x},\bar{y}|_\Gamma := \min_{\gamma\in\Gamma} \|x - \gamma(y)\| \text{ für alle } x,\ y \in \mathbb{R}^n$$

definierte Metrik auf $\mathbb{R}^n/\Gamma$ die durch Γ induzierte Metrik.

Man rechnet nach, daß für jede kristallographische Gruppe Γ tatsächlich $|.|_\Gamma$ eine wohldefinierte Metrik ist. Ferner induziert $|.|_\Gamma$ auf $\mathbb{R}^n/\Gamma$ die Quotiententopologie.

Sind (R_1,d_1) und (R_2,d_2) metrische Räume, dann heißt eine bijektive Abbildung

$$f: R_1 \longrightarrow R_2 \quad ,$$

für die

$$d_1(x,y) = d_2(f(x),f(y)) \quad \text{für alle } x,y \in R_1$$

gilt, eine Isometrie von (R_1,d_1) nach (R_2,d_2). Eine Isometrie ist insbesondere ein Homöomorphismus bzgl. der durch die Metriken induzierten Topologien. Ferner gilt:

5.2 HILFSSATZ

Sind U_1 und U_2 Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und ist $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt:
Ist

$$f: U_1 \longrightarrow U_2$$

eine Isometrie, dann ist $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, und es existiert ein $\beta \in E(n)$, so daß für alle $x \in U_1$ gilt:

$$f(x) = \beta(x) ,$$

und β ist eindeutig bestimmt. □

Ferner gilt:

5.3 BEMERKUNG

Ist $\beta \in E(n)$ und sind $p_1,\ldots,p_n$ linear unabhängige Punkte des $\mathbb{R}^n$, die eine Hyperebene $U \subset \mathbb{R}^n$ aufspannen, und ist $\beta' \in E(n)$ mit

$$\beta(p_i) = \beta'(p_i) \quad \text{für alle} \quad i = 1,\ldots,n ,$$

dann ist entweder

$$\beta' = \beta$$

oder

$$\beta' = s \circ \beta,$$

wobei s die Spiegelung des $\mathbb{R}^n$ an der Hyperebene $\beta(U) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ die kanonische Projektion, dann heißt ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ regulär, falls ein Nicht-Fixpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ von Γ existiert mit $p(x) = \bar{x}$. Andernfalls heißt $\bar{x}$ singulär. Es gilt: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $p(x) \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ singulär bzw. regulär, genau dann, wenn x ein Fixpunkt bzw. ein Nicht-Fixpunkt von Γ ist.

Ist $x_o \in \mathbb{R}^n$ ein Nicht-Fixpunkt von Γ und F_{x_o} der Dirichlet-Bereich von Γ in x_o, dann können wir auf dem Orbitraum die Mengen $p(F_{x_o})$ bzw. $p(\mathrm{Rd}\, F_{x_o})$ mit Hilfe der Metrik $|.|_\Gamma$ kennzeichnen. Das geschieht in 5.4 . Dazu definieren wir für alle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ und alle $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$K(\bar{x},r)_\Gamma := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n/\Gamma \mid |\bar{x},\bar{y}|_\Gamma < r\}.$$

5.4 HILFSSATZ

Ist F_{x_o} der Dirichlet-Bereich von Γ in dem Nicht-Fixpunkt x_o, dann gilt für jedes $x \in F_{x_o}$:

Es ist $x \in \mathrm{Rd}\, F_{x_o}$ genau dann, wenn $p(x)$ singulär ist oder min-

destens zwei verschiedene Wege $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_2$ in $\mathbb{R}^n/\Gamma$ existieren, die jeweils als Anfangspunkt $p(x_o)$ und als Endpunkt $p(x)$ haben und die die Eigenschaft besitzen:

$$|\bar{s}_i(t_o),\bar{s}_i(t_1)|_\Gamma + |\bar{s}_i(t_1),\bar{s}_i(t_2)|_\Gamma = |\bar{s}_i(t_o),\bar{s}_i(t_2)|_\Gamma$$

$$\text{für alle } 0 \leq t_o < t_1 < t_2 \leq 1.$$

Ferner ist $p(x)$ genau dann regulär, wenn ein $r_o \in \mathbb{R}_+^*$ existiert, so daß eine Isometrie

$$f: K(0,r_o) \longrightarrow K(p(x),r_o)_\Gamma$$

mit $f(0) = p(x)$ existiert.

BEWEIS

Ist $x \in \text{Rd } F_{x_o}$ und $p(x)$ nicht singulär, dann ist x ein Nicht-Fixpunkt von Γ. Daher existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \in \text{Rd } F_{x_o}$ und $\gamma(x) \neq x$. Es sei nun s_1 die Strecke in F_{x_o} von x_o nach x, und es sei s_2 die Strecke in F_{x_o} von x_o nach $\gamma(x)$. Für $i = 1,2$ erfüllen $\bar{s}_i := p \circ s_i$ die obige Behauptung.

Ist umgekehrt $x \in \overset{\circ}{F}_{x_o}$, dann ist $p(x)$ regulär und für jeden Weg $\bar{s}$ in $\mathbb{R}^n/\Gamma$ mit Anfangspunkt $p(x_o)$ und Endpunkt $p(x)$, der die obige Eigenschaft besitzt, existiert eine eindeutig bestimmte Strecke s in F_{x_o} mit Anfangspunkt x_o und Endpunkt mit $\bar{s} = p \circ s$.

Weil die Strecke s durch Anfangspunkt und Endpunkt bereits eindeutig bestimmt ist, ist auch $\bar{s}$ in diesem Fall eindeutig

bestimmt. Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Ist $p(x)$ regulär, dann existiert ein $r_o \in \mathbb{R}_+^*$, so daß

$$p|_{K(x,r_o)} : K(x,r_o) \longrightarrow p(K(x,r_o)) = K(p(x),r_o)_\Gamma$$

eine Isometrie ist. Dann ist auch

$$\begin{aligned} f: K(0,r_o) &\longrightarrow K(p(x),r_o)_\Gamma \\ y &\longmapsto p(y+x) \end{aligned}$$

eine Isometrie, für die $f(0) = p(x)$ gilt.

Ist umgekehrt $p(x)$ singulär, dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$, mit $\gamma(x) = x$. Weil γ einen Fixpunkt (nämlich x) besitzt, hat γ endliche Ordnung k. Weil $\gamma \neq id$ ist, ist $k > 1$. Bezeichnen wir für jede Lebesgue-meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $V(M)$ das Volumen von M, dann gilt für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 < k \cdot V(K(x,r) \cap \overset{\circ}{F}_{x_o}) \leq V(K(x,r)), \tag{5.5}$$

denn für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$ ist $\gamma(K(x,r) \cap \overset{\circ}{F}_{x_o}) \subset K(x,r)$.
Nehmen wir nun an, es existiert ein $r_o \in \mathbb{R}_+^*$ und eine Isometrie

$$f: K(0,r_o) \longrightarrow K(p(x),r_o)_\Gamma ,$$

dann gilt mit $U := K(x,r_o) \cap \overset{\circ}{F}_{x_o}$ und $U' := f^{-1} \circ p(U)$:

$$f^{-1} \circ p|_U : U \longrightarrow U'$$

ist eine Isometrie, denn:

Für jedes $y \in U$ existiert eine offene Umgebung $U_y \subset U$ von y, so daß $p|_{U_y} : U_y \to p(U_y)$ eine Isometrie ist. Also existiert gemäß 5.2 ein $\beta_y \in E(n)$ mit $\beta_y|_{U_y} = f^{-1} \circ p|_{U_y}$. Weil U zusammenhängend ist, existieren zu je zwei Punkten y, $y' \in U$ endlich viele $y_1, \ldots, y_l \in U$ mit $y_1 = y$ und $y_l = y'$ sowie $U_{y_i} \cap U_{y_{i+1}} \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, l-1$. Aus 5.2 folgt damit, daß $\beta_y = \beta_{y'} =: \beta$ ist, und daher $f^{-1} \circ p|_U = \beta|_U$ ist.

Insbesondere ist $f^{-1} \circ p|_U$ volumentreu und es ist

$$V(U) = V(U') .$$

Das ist ein Widerspruch zu 5.5 .

□

Mit 5.4 können wir nun folgenden Satz zeigen:

5.6 SATZ

Sind Γ_1 und Γ_2 kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$, dann existiert eine Isometrie

$$f: \mathbb{R}^n/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_2$$

genau dann, wenn ein $\beta \in E(n)$ existiert, so daß

$$\Gamma_2 = \beta\Gamma_1\beta^{-1}$$

ist.

BEWEIS

Sind Γ_1 und Γ_2 kristallographische Gruppen des $\mathbb{R}^n$, und existiert ein $\beta \in E(n)$, so daß $\Gamma_2 = \beta\Gamma_1\beta^{-1}$ ist, so wird durch

$$\begin{aligned} f_\beta : \mathbb{R}^n/\Gamma_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_2 \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{\beta x} \end{aligned}$$

eine Isometrie definiert.

Andererseits sei nun

$$f : \mathbb{R}^n/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_2$$

eine Isometrie.

Wir bezeichnen im folgenden mit

$$p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_i, \quad i = 1, 2 ,$$

die kanonischen Projektionen.

Ist nun $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ein Nicht-Fixpunkt von Γ_1, dann ist $p(x_1)$ regulär, ferner wegen, 5.4, ist auch $f \circ p_1(x_i)$ regulär. Es sei nun $x_2 \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $p_2(x_2) = f \circ p_1(x_1)$ ist. Weil $p_2(x_2)$ regulär ist, ist dann x_2 ein Nicht-Fixpunkt von Γ_2. Für $i = 1, 2$ sei F_{x_i} der Dirichlet-Bereich von Γ_i in x_i. Ist $x \in \mathring{F}_{x_i}$, dann existiert ein $r_x \in \mathbb{R}_+^*$, so daß $K(x,r_x) \subset \mathring{F}_{x_i}$ ist, und $p_i|_{K(x,r_x)} : K(x,r_x) \to K(p_i(x),r_x)_\Gamma$ eine Isometrie ist.

Wegen 5.4 können wir für je zwei Punkte $x \in \mathring{F}_{x_1}$ und $\tilde{x} \in \mathring{F}_{x_2}$, für die $f \circ p_1(x) = p_2(\tilde{x})$ gilt, o.B.d.A. annehmen,

$$r_x = r_{\tilde{x}} ;$$

und es existiert ein $\beta_x \in E(n)$, so daß

$$\beta_x|_{K(x,r_x)}: K(x,r_x) \to K(\tilde{x},r_x)$$

eine Isometrie mit der Eigenschaft

$$p_2 \circ \beta_x|_{K(x,r_x)} = f \circ p_1|_{K(x,r_x)}$$

ist.

Weil $\bar{F}_{x_1}$ als konvexe Menge insbesondere zusammenhängend ist, existieren zu je zwei Punkten x und $x' \in \mathring{F}_{x_1}$ endlich viele Punkte $y_1,\ldots,y_l \in \bar{F}_{x_1}$ mit $y_1 = x$ und $y_l = x'$ sowie

$$K(x_i,r_{y_i}) \cap K(y_{i+1}, r_{y_{i+1}}) \neq \emptyset \text{ für } i = 1,\ldots,l-1.$$

Aus 5.2 folgt dann, daß $\beta_x = \beta_{x'} =: \beta$ ist, und daher

$$p_2 \circ \beta|_{\mathring{F}_{x_1}} = f \circ p_1|_{\mathring{F}_{x_1}}$$

ist. Dann ist aber auch

$$p_2 \circ \beta|_{F_{x_1}} = f \circ p_1|_{F_{x_1}}.$$

Ist nun $\{\gamma,\gamma^{-1}\}$ eine geometrische Erzeugende von Γ_1 bzgl. F_{x_1}, dann existiert eine geometrische Erzeugende $\{\tilde{\gamma},\tilde{\gamma}^{-1}\}$ von Γ_2 bzgl. F_{x_2}, so daß für $D_\gamma := F_{x_1} \cap \gamma^{-1}(F_{x_1})$ und $\tilde{D}_{\tilde{\gamma}} := F_{x_2} \cap \tilde{\gamma}^{-1}(F_{x_2})$ gilt:

Für alle $\tilde{x} \in \tilde{D}_{\tilde{\gamma}}$ ist

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \beta \circ \gamma \circ \beta^{-1}(\tilde{x}).$$

Weil ferner sowohl

$$\overset{\circ}{F}_{x_2} \cap \tilde{\gamma}(\overset{\circ}{F}_{x_2}) = \emptyset$$

als auch

$$\overset{\circ}{F}_{x_2} \cap \beta \circ \gamma \circ \beta^{-1}(\overset{\circ}{F}_{x_2}) = \emptyset$$

ist, folgt aus 5.3 , daß

$$\tilde{\gamma} = \beta \circ \gamma \circ \beta^{-1}$$

ist. Daher folgt:

$$\beta \Gamma_1 \beta^{-1} \subset \Gamma_2 .$$

Analog gilt $\beta \Gamma_1 \beta^{-1} \supset \Gamma_2$ und damit

$$\Gamma_2 = \beta \Gamma_1 \beta^{-1}.$$

□

Falls eine Isometrie $f: \mathbb{R}^n/\Gamma_1 \to \mathbb{R}^n/\Gamma_2$ existiert, heißen die Orbiträume isometrisch äquivalent; zwei Orbiträume $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ und $\mathbb{R}^n/\Gamma_2$ sind genau dann isometrisch äquivalent, wenn Γ_1 und Γ_2 euklidisch äquivalent sind. Für jede kristallographische Gruppe Γ repräsentiert $M(\Gamma)$ daher genau die Isometrieklassen aller Orbiträume $\mathbb{R}/\Gamma'$, wobei Γ' eine zu Γ isomorphe kristallographische Gruppe ist.

6. Die Modulräume der kristallographischen Gruppen der Ebene

Es existieren genau 17 verschiedene Isomorphieklassen kristallographischer Gruppen des $\mathbb{R}^2$. Wir zeichnen in jeder dieser Isomorphieklassen eine kristallographische Gruppe aus:

BEZEICHNUNGEN

Für jedes $i = 1,\ldots,17$ sei mit Γ_i die von $\mathcal{E}_i$ erzeugte Untergruppe von $E(2)$ bezeichnet. Dabei seien

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$B_3 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B_4 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_6 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$$

und

$\mathcal{E}_1 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2))$

$\mathcal{E}_2 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (-E_2,0))$

$\mathcal{E}_3 := ((E_2,e_1), (E_2,t), (B_3,0))$

$\mathcal{E}_4 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (B_4,0))$

$\mathcal{E}_5 := ((E_2,e_1), (E_2,t), (B_6,0))$

$\mathcal{E}_6 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (S_1,0))$

$\mathcal{E}_7 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (S_2,0))$

$\mathcal{E}_8 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (S_2,\frac{1}{2}e_1))$

$\mathcal{E}_9 := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (-E_2,0), (S_1,0))$

$\mathcal{E}_{10} := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (-E_2,0), (S_2,0))$

$\mathcal{E}_{11} := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (-E_2,0), (S_2,\frac{1}{2}e_2))$

$\mathcal{E}_{12} := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (-E_2,0), (S_2,\frac{1}{2}(e_1+e_2)))$

$\mathcal{E}_{13} := ((E_2,e_1), (E_2,t), (B_3,0), (-S_1,0))$

$\mathcal{E}_{14} := ((E_2,e_1), (E_2,t), (B_3,0), (S_1,0))$

$\mathcal{E}_{15} := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (B_4,0), (S_1,0))$

$\mathcal{E}_{16} := ((E_2,e_1), (E_2,e_2), (B_4,0), (S_1,\frac{1}{2}(e_1+e_2)))$

$\mathcal{E}_{17} := ((E_2,e_1), (E_2,t), (B_6,0), (S_1,0))$

Für jedes $i = 1,\ldots,17$ repräsentiert Γ_i genau eine der 17 Isomorphieklassen kristallographischer Gruppen des $\mathbb{R}^2$ (vgl. [4; § 18]).

Ferner sei im folgenden für jedes $i = 1,\ldots,17$ die Untergruppe der Translationen in Γ_i mit $\mathcal{T}_i$ bezeichnet und

$$G_i := \{A \in O(2) \mid \text{es gibt ein } a \in \mathbb{R}^2, \text{ so daß } (A,a) \in \Gamma_i \text{ ist}\},$$

so daß die Sequenz

$$0 \to \mathcal{T}_i \to \Gamma_i \to G_i \to 1$$

exakt ist.

Für i = 3, 4, 5, 13, 14, 15, 16 und 17 ist der $\mathbb{R}^2$ ein einfacher G_i-Modul. Daher folgt aus 4.12 :

6.1

Für i = 3, 4, 5, 13, 14, 15, 16 und 17 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_i) = M(\Gamma_i) = \{c \cdot E_2 \mid c \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

□

Ferner gilt :

6.2

Für i = 1, 2 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_i) = F(2)$$
$$M(\Gamma_i) = F(2)/\mathfrak{M}(2).$$

Es ist $M(\Gamma_i)$ homöomorph zu $\{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0\}$.

BEWEIS

Für i = 1, 2 ist

$$F(G_i) = F(2)$$
$$N(\Gamma_i)^* = \mathfrak{M}(2).$$

Daß $M(\Gamma_i)$ homöomorph zu $\{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq 0\}$ ist, folgt aus [16; § 13].

□

6.3

Für i = 6 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_6) = M(\Gamma_6) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a^2 > b^2\} .$$

BEWEIS

Für i = 6 ist

$$F(G_6) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a^2 > b^2\}$$

$$N(\Gamma_6)^* = \{ E_2, -E_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\},$$

und es operiert $N(\Gamma_6)^*$ trivial auf $F(G_6)$.

□

6.4

Für i = 7, 8 und 11 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_i) = M(\Gamma_i) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}_+^*\} .$$

BEWEIS

Für i = 7,8 und 11 ist

$$F(G_i) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}_+^*\}$$

$$N(\Gamma_i)^* = \{E_2, -E_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\},$$

und es operiert $N(\Gamma_i)^*$ trivial auf $F(G_i)$.

□

6.5

Für i = 9 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_9) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a^2 > b^2\}$$

$$M(\Gamma_9) = \tilde{M}(\mathcal{E}_9)/\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation "~" wie folgt definiert sei:

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $a_1 = a_2$ und $|b_1| = |b_2|$ ist.

BEWEIS

Für i = 9 ist

$$F(G_9) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a^2 > b^2\}$$

$$N(\Gamma_9)^* = \{E_2, -E_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\},$$

und durch die Operation von $N(\Gamma_9)^*$ auf $F(G_9)$ wird jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in F(G_9)$ mit $\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in F(G_9)$ identifiziert.

□

6.6

Für i = 10, 12 gilt:

$$\tilde{M}(\mathcal{E}_i) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}_+^*\}$$

$$M(\Gamma_i) = \tilde{M}(\mathcal{E}_i)/\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation "~" wie folgt definiert sei:

$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ oder wenn $a_1 = b_2$ und $b_1 = a_2$ ist.

BEWEIS

Für $i = 10, 12$ ist

$$F(G_i) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}_+^*\}$$

$$N(\Gamma_i)^* = \{E_2, -E_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\},$$

und durch die Operation von $N(\Gamma_i)^*$ auf $F(G_i)$ wird jedes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in F(G_i)$ mit $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in F(G_i)$ identifiziert.

□

7. Weil-Räume und Chabauty-Räume

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen den im 4. Kapitel definierten Räumen und den entsprechenden Weil- bzw. Chabauty-Räumen (vgl. [5], [8], [17]) hergestellt.

Es sei X ein topologischer Raum und

$$A(X) := \{F \mid F \subset X \text{ und } F \text{ ist abgeschlossen in } X\}.$$

Die von allen Teilmengen von A(X) der Form

$$\{F \mid F \in A(X),\ F \cap K = \emptyset,\ F \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, F \cap U_k \neq \emptyset\},$$

wobei $K \subset X$ kompakt und $U_i \subset X$ offen für $i = 1,\ldots,k$ ist, erzeugte Topologie auf A(X) nennen wir $\mathcal{H}$-Topologie (vgl. [6], [14; 1.1]).

Im folgenden sei H eine Lie-Gruppe und $\Gamma \subset H$ eine diskrete Untergruppe von H, für die der Quotientenraum H/Γ kompakt ist. Bezeichnen wir mit

$$S(H) := \{\Gamma' \mid \Gamma' \text{ ist diskrete Untergruppe von } H\}$$
$$S_o(\Gamma,H) := \{\Gamma' \mid \Gamma' \in S(H) \text{ und } \Gamma' \text{ ist isomorph zu } \Gamma\}$$

dann gilt, weil jede diskrete Untergruppe von M auch abgeschlossen in H ist:

$$S(H) \subset A(H).$$

Die $\mathcal{H}$-Topologie induziert auf S(H) die von C. Chabauty in [5] definierte Topologie (vgl. [14; 1.6]).

Ferner führt A. Weil in [17] folgende Bezeichnungen ein:

$R(\Gamma,H) := \{r \mid r\colon \Gamma \to H$ ist Homomorphismus$\}$ versehen mit der Unterraumtopologie bzgl. des Produktraumes H^{Γ}.

$R_o(\Gamma,H) := \{r \mid r \in R(\Gamma,H)$, r ist injektiv, $r(\Gamma) \subset H$ ist diskret und $H/r(\Gamma)$ ist kompakt$\}$ versehen mit der Unterraumtopologie bzgl. $R(\Gamma,H)$.

Falls H nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, gilt:

7.1 $R_o(\Gamma,H) \subset R(\Gamma,H)$ ist offen und
$S_o(\Gamma,H) \subset S(H)$ ist offen

(vgl. [17], [8; 2.21 und 2.22]).

Durch

$$\begin{aligned} R(\Gamma,H) \times \operatorname{Aut}\Gamma &\longrightarrow R(\Gamma,H) \\ (r,\phi) &\longmapsto r \circ \phi \end{aligned}$$

wird eine stetige Operation von rechts von $\operatorname{Aut}\Gamma$ auf $R(\Gamma,H)$ definiert, die den Unterraum $R_o(\Gamma,H)$ in sich überführt. Falls H nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, gilt gemäß [8; 3.1]:

7.2 $R_o(\Gamma,H)/\operatorname{Aut}\Gamma$ und $S_o(\Gamma,H)$ sind homöomorph.

Durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Aut} H \times R(\Gamma,H) &\longrightarrow R(\Gamma,H) \\ (\phi,r) &\longmapsto \phi \circ r \end{aligned}$$

wird eine stetige Operation von links von $\operatorname{Aut} H$ auf $R(\Gamma,H)$ definiert, die den Unterraum $R_o(\Gamma,H)$ in sich überführt, und durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Aut} H \times S(H) &\longrightarrow S(H) \\ (\phi,\Gamma') &\longmapsto \phi(\Gamma') \end{aligned}$$

wird eine stetige Operation von links von $\operatorname{Aut} H$ auf $S(H)$ definiert, die den Unterraum $S_o(\Gamma,H)$ in sich überführt.
Aus 7.1 folgt:

Falls H nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, gilt:

7.3
$$\begin{aligned} &R_o(\Gamma,H)/\operatorname{Aut} H \subset R(\Gamma,H)/\operatorname{Aut} H \text{ ist offen und} \\ &S_o(\Gamma,H)/\operatorname{Aut} H \subset S(H)/\operatorname{Aut} H \text{ ist offen.} \end{aligned}$$

Ist nun $H = E(n)$ und $\Gamma \subset E(n)$ eine Untergruppe, dann ist gemäß 1.2 der Raum $R_o(\Gamma,E(n))$ genau dann definiert, wenn Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ ist.

Es gilt (vgl. 4.2):

7.4 SATZ

Für jede kristallographische Gruppe Γ des $\mathbb{R}^n$ sind $R(\Gamma)$ und $R_o(\Gamma,E(n))$ homöomorphe topologische Räume.

BEWEIS

Es sei

$$\begin{aligned} \phi\colon R(\Gamma) &\longrightarrow R_o(\Gamma,E(n)) \\ \alpha &\longmapsto r_\alpha \end{aligned} \quad ,$$

wobei für jedes $\alpha \in R(\Gamma)$

$$\begin{aligned} r_\alpha\colon \Gamma &\longrightarrow E(n) \\ \gamma &\longmapsto \alpha\gamma\alpha^{-1} \end{aligned}$$

sei.

Aus 1.3 folgt, daß ϕ injektiv, aus 1.6 , daß ϕ surjektiv ist. Bezeichnen wir für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit

$$\begin{aligned} p_\gamma\colon E(n)^\Gamma &\longrightarrow E(n) \\ (r\colon \Gamma \to E(n)) &\longmapsto r(\gamma) \end{aligned}$$

die natürliche Projektion, dann ist

$$p_\gamma \circ \phi \quad \text{stetig für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Damit folgt, daß ϕ stetig ist.

Es sei nun

$$\mathcal{E} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$$

ein Erzeugendensystem von Γ, und für $i = 1,\ldots,s$ sei

$$p_i := p_{\gamma_i}$$

$$\phi_i := p_i \circ \phi \, .$$

Wegen 1.3 gilt für alle $\alpha \in R(\Gamma)$ und alle $r \in R_o(\Gamma,E(n))$:
Es ist $r = r_\alpha$ genau dann, wenn

$$r(\gamma_i) = r_\alpha(\gamma_i) \quad \text{für alle } i = 1,\ldots,s \text{ ist.}$$

Damit folgt für jede offene Menge $U \subset R(\Gamma)$, daß

$$\phi(U) = \bigcap_{i=1}^{s} p_i^{-1} \circ \phi_i(U)$$

ist. Weil sowohl p_i als auch ϕ_i stetig und offen sind, folgt, daß $\phi(U) \subset R_o(\Gamma,E(n))$ offen ist.
Also ist ϕ offen. Insgesamt ist gezeigt, daß ϕ ein Homöomorphismus ist.

□

7.5 HILFSSATZ

Es sei $f \in \mathrm{Aut}\, E(n)$. Dann existiert ein $\alpha \in A(n)$ der Form

$\alpha = (c \cdot B_o, b_o)$, wobei $B_o \in O(n)$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, $b_o \in \mathbb{R}^n$ ist,

so daß für alle $\beta \in E(n)$ gilt:

$$f(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}.$$

BEWEIS

Weil die Untergruppe

$$\mathcal{T} := \{(E_n,t) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$$

der Translationen in E(n) charakteristisch ist, ist

$$f|_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

ein Automorphismus. Daher existiert ein $A_o \in GL(n,\mathbb{R})$ mit

$$f((E_n,t)) = (E_n,A_o t) \quad \text{für alle } (E_n,t) \in \mathcal{T}.$$

Definieren wir $b_o \in \mathbb{R}^n$ durch

$$f((-E_n,0)) =: (-E_n,2b_o)$$

dann gilt für

$$\alpha := (A_o,b_o),$$

daß für alle $\beta \in E(n)$

$$f(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$$

ist.

Weil insbesondere gilt

$$A_o B A_o^{-1} \in O(n) \text{ für alle } B \in O(n),$$

gilt auch

$$(A_o B A_o^{-1})^t (A_o B A_o^{-1}) = E_n \text{ für alle } B \in O(n),$$

also

$$A_o^t A_o B = B A_o^t A_o \text{ für alle } B \in O(n).$$

Weil $A_o^t A_o$ eine symmetrische Matrix ist, besitzt $A_o^t A_o$ reelle Eigenwerte, und mit 3.2 folgt, daß ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ existiert,

so daß

$$A_o^t A_o = \lambda \cdot E_n$$

ist. Für

$$B_o := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot A_o$$

$$c := \sqrt{\lambda}$$

folgt die Behauptung.

□

Aus [2; § 4] folgt:

7.6 HILFSSATZ

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, und ist $f \in \mathrm{Aut}\,\Gamma$, dann existiert ein $\alpha_f \in N(\Gamma)$, so daß für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$f(\gamma) = \alpha_f \gamma \alpha_f^{-1}.$$

□

Es sei nun Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$, ferner

$$0 \to \mathcal{T} \to \Gamma \to G \to 1$$

ihre exakte Sequenz gemäß 1.4, und $\mathcal{E}$ sei ein Erzeugendensystem von Γ.

Auf dem Raum F(G) der G-invarianten, positiv definiten, sym-

metrischen Bilinearformen definieren wir eine Äquivalenzrelation "~":

Für alle $C_1, C_2 \in F(G)$ sei

$C_1 \sim C_2$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ existiert, so daß $C_1 = \lambda C_2$ ist.

Mit $\tilde{M}(\mathcal{E})/\sim$ sei der Quotientenraum von $F(G) = \tilde{M}(\mathcal{E})$ bzgl. dieser Äquivalenzrelation bezeichnet.

Die Operation von $N(\Gamma)^*$ auf $F(G)$ induziert eine Operation von $N(\Gamma)^*$ auf $\tilde{M}(\mathcal{E})/\sim$. Den Orbitraum von $\tilde{M}(\mathcal{E})/\sim$ bzgl. dieser Operation bezeichnen wir mit $M(\Gamma)/\sim$. Aus 2.6 und 4.10 folgt, daß $\tilde{M}(\mathcal{E})/\sim$ und $M(\Gamma)/\sim$ lokal semianalytische Räume der Dimension $\nu^*(\Gamma)-1$ sind.

Aus 7.2 , 7.4 , 7.5 und 7.6 folgt:

7.7 SATZ

Ist Γ eine kristallographische Gruppe des $\mathbb{R}^n$ und ist $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Γ, dann sind jeweils

$$\tilde{M}(\mathcal{E})/\sim \text{ und } R_o(\Gamma, E(n))/\mathrm{Aut}(E(n))$$

sowie

$$M(\Gamma)/\sim \text{ und } S_o(\Gamma, E(n))/\mathrm{Aut}(E(n))$$

homöomorphe topologische Räume.

□

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Bieberbach, L., Über Bewegungsgruppen euklidischer Räume I, Math. Ann. 70 (1911), 297-336

[2] Bieberbach, L., Über Bewegungsgruppen euklidischer Räume II, Math. Ann. 72 (1912), 400-412

[3] Bourbaki, N., Integration, Chap. 8, Hermann, Paris

[4] Burckhardt, J.J., Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, Birkhäuser Verlag, Basel 1947

[5] Chabauty, C., Limites d'ensemble et géometrie des nombres, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 143-151

[6] Fell, J.M.G., A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space, Proc. Amer. math. Soc. 13 (1962), 472-476

[7] Frobenius, F.G., Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1911), 654-665

[8] Macbeath, A.M., Singerman, D., Spaces of subgroups and Teichmüller space, Proc. London Math. Soc. (3) 31 (1975), 211-256

[9] Menke, L., Kristallographische Gruppen, Ruhr-Universität Bochum 1978 (Examensarbeit)

[10] Reichard, K., Quotienten analytischer und differenzierbarer Räume nach Transformationsgruppen, Ruhr-Universität Bochum 1978

[11] Serre, J.P., Linear Representations of Finite Groups, Springer Verlag, New York 1977

[12] Spallek, K.H., Differenzierbare Räume, Math. Ann. 180 (1969), 269-296

[13] Speiser, A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Birkhäuser Verlag 1956 (vierte Auflage)

[14] Stieglitz, A., Über den Untergruppenraum einer lokalkompakten Gruppe, Diss. Bochum 1972

[15] v.d. Waerden, B.L., Algebra II, Fünfte Auflage der Modernen Algebra, Springer Verlag, Berlin 1967

[16] v.d. Waerden, B.L., Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen, Acta Math. 96 (1956), 265-293

[17] Weil, A., On discrete subgroups of Lie groups, Ann. of Math. 72 (1960), 369-384

[18] Wolf, J.A., Spaces of constant curvature, McGraw Hill, New York, 1966

[19] Zassenhaus, H., Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, Comm. Math. Helvet. 21 (1948), 117-141

[20] Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, H.-D., Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen, Springer Verlag Berlin, Heidelberg 1970

Lebenslauf

14.10.1953	geboren in Bochum als Sohn der Eheleute Paula (geb. Treitz) und Clemens Mellis
1960-1964	Besuch der Volksschule in Essen-Margarethenhöhe
1964-1973	Humboldt-Gymnasium in Essen
16.5.1973	Abitur
WS 73/74	Immatrikulation an der Ruhr-Universität Bochum zum Mathematik- und Philosophie-Studium
22.3.1979	Diplom in Mathematik
SS 1979 bis WS 1980/81	Beschäftigung als Wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum
21.4.1980	erste philologische Staatsprüfung in den Fächern Mathematik und Philosophie
1.9.1980	Beschäftigung als Referendar im Bezirks-seminar für das Lehramt am Gymnasium in Recklinghausen
5.1.1981	Heirat mit Mechthild Stevermann